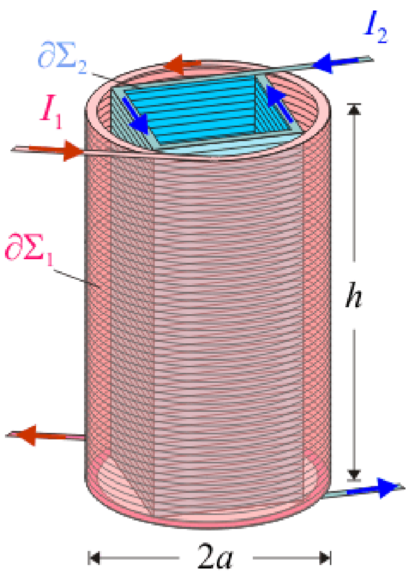
1 Enunciado

Se tienen dos bobinas o solenoides, ambas de igual longitud h, pero de distinta sección: la bobina "1" tiene forma de cilindro recto, estando formada por N_1 espiras circulares de radio a. Por su parte, la bobina "2" tiene forma de prisma recto de sección cuadrada y la constituyen N_2 espiras cuadradas iguales, cuya diagonal mide $2a$. En ambas bobinas los hilos conductores están enrollados en el mismo sentido, y de manera que las espiras se distribuyen de forma compacta en planos perpendiculares a su correspondiente eje. Asumiendo que se verifica la condición de bobinas largas ($h \gg 2a$), ¿cuáles son los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua del sistema cuando la bobina "2" se coloca por completo en el interior de la "1"?

2 Solución



En un sistema formado por varias espiras o circuitos cerrados donde circulan sendas corrientes eléctricas estacionarias, los difentes flujos magnéticos de los campos generados por dichas corrientes, a través de las superficies definidas por las espiras, puede expresarse como una combinación lineal de las intensidades de corriente. El sistema bajo estudio está formados por dos bobinas que constituyen sendos circuitos $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, que cuando son recorridos por corrientes de intensidad I_1 eI_2, respectivamente, generarán campos magnéticos tales que los flujos del campo magnético total a través de aquéllas verificarán las relaciones,

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 = L_1\, I_1 + M\, I_2$$

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2 = M\, I_1 + L_2\, I_2$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción de las bobinas, y M el de inducción mutua. Y puesto que estos coeficientes están directamente relacionados con los flujos magnéticos a través de superificies Σ_1 y Σ_2 delimitadas por los circuitos $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, van a depender tanto de su forma y geometría como de su disposición relativa.

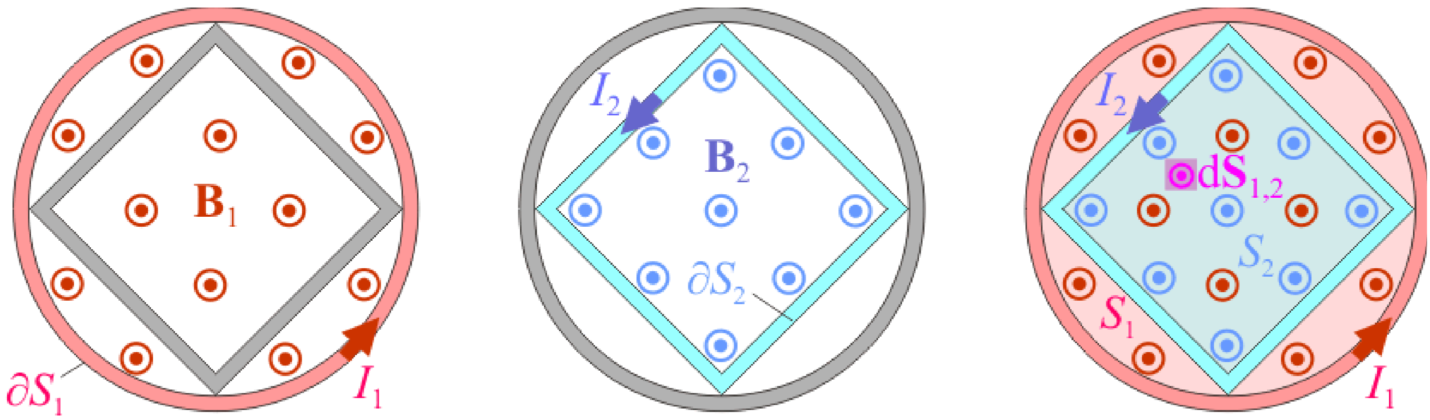
Nótese que como las bobinas son circuitos formados por N_1 y N_2 espiras planas y paralelas (circulares y cuadradas, respectivamente) las superficies Σ_1 y Σ_2 se pueden descomponer en N_1 círculos idénticos de radio a, y N_2 cuadrados iguales de lado $\sqrt{2}\,a$, todos contenidos en planos parelelos, que consideraremos perpendiculares a la dirección OZ. Sean S_1 y S_2 las superficies planas delimitadas por sendos representantes $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ de las espiras que conforman las bobinas; los flujos magnéticos a través de éstas son:

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1$$

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2 = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2$$

con $\mathrm{d}\mathbf{S}_{1,2} = \mathrm{d}S\,\mathbf{k}$. En una situación general en que las bobinas son recorridas por sendas corrientes de intensidades I_1 e I_2, el campo total que fluye a través de ellas es igual a la suma vectorial de los campos magnéticos creado por cada una de las corrientes. En el enunciado se indica que la longitud de las bobinas es mucho mayor que la de su diámetro y diagonal; en consecuencia, es aplicable la aproximación de bobina larga: el campo magnético creado por la corriente en cada bobina es prácticamente nulo en todos los puntos del exterior y constante en los del interior, y además, independiente de la forma que tenga la sección de la bobina. Por tanto, en los puntos del plano que contiene a las espiras S_1 y S_2, se tendrá:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{N_1}{h} I_1\,\mathbf{k}\,; & \text{si } \; P \in S_1 \\[2ex] \mathbf{0}\,; & \text{si } \; P \notin S_1 \end{cases} \qquad\qquad \mathbf{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{N_2}{h} I_2\,\mathbf{k}\,; & \text{si } \; P \in S_2 \\[2ex] \mathbf{0}\,; & \text{si } \; P \notin S_2 \end{cases}$$



Y como los puntos de la superficie S_2, delimitada por la espira cuadrada constituyen un subconjunto del círculo S_1 delimitado por la circular (es decir, $S_2 \subset S_1$), se tendrá:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{h}\big(N_1 I_1 + N_2 I_2\big)\,\mathbf{k}\,; & \text{si } \; P \in S_2 \\[2ex] \dfrac{\mu_0}{h}\; N_1 I_1\,\mathbf{k}\,; & \text{si } \; P \in S_1 - S_2 \\[2ex] \mathbf{0}\,; & \text{si } \; P \notin S_1 \end{cases}$$

Por tanto, la expresiones de los flujos magnéticos a través de las bobinas, en función de sus propiedades geometricas son...

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_1} = N_1\,\frac{\mu_0}{h}\left[N_1 I_1 \int_{S_1} \mathrm{d}S_1 \,+ N_2 I_2 \int_{S_2} \mathrm{d}S_2\right] = \frac{\mu_0}{h}\left(\pi a^2 N_1^2 I_1 + 2\,a^2 N_1 N_2 I_2\right)$$

$$\Phi_m\rfloor_{\Sigma_2} = N_2\,\frac{\mu_0}{h}\left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)\int_{S_2} \mathrm{d}S_2 = \frac{\mu_0}{h}\,2\,a^2\,\left(N_1 N_2 I_1 + N_2^2 I_2\right)$$

E identificando en cada una de las expresiones los factores que multiplican a las intensidades de las corrientes en cada bobina, se obtienen los coeficientes de autoinducción e inducción mutua del sistema:

$$L_1 = \mu_0\,N_1^2\,\frac{\pi a^2}{h}\,; \quad M = \mu_0\,N_1 N_2\,\frac{2a^2}{h}\,; \quad L_2 = \mu_0\,N_2^2\,\frac{2\,a^2}{h}$$